

2.2.3 一元二次不等式的解法（一）

【教学目标】

1. 理解一元二次不等式的概念，掌握一元二次不等式的解法，体会一元二次方程与一元二次不等式的关系.
2. 进一步理解用数轴表示不等式解集的方法，体会数形结合、转化、分类讨论等数学思想方法，提高逻辑思维能力，发展数学运算的核心素养.
3. 提高学习数学的兴趣，体会事物之间普遍联系的辩证思想.

【教学重点】

一元二次不等式的解法.

【教学难点】

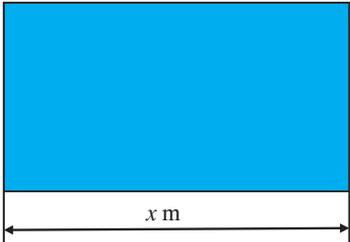
将一元二次不等式转化为同解的不等式组.

【教学方法】

本节课主要采用启发式教学法. 首先通过问题情境引入一元二次不等式，介绍一元二次不等式的有关概念，接着，引导学生学习用化归的思想，把一元二次不等式转化为同解的一元一次不等式组，从而求出其解集.

【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	<p>1. 解一元二次方程：</p> <p>(1) $x^2 - 15x + 50 = 0$；</p> <p>(2) $x^2 - x - 12 = 0$.</p> <p>2. 解一元一次不等式组：</p> <p>(1) $\begin{cases} x > 3, \\ x > 7; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x > -1, \\ x > 3; \end{cases}$</p> <p>(3) $\begin{cases} x < -3, \\ x < 2; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x < 1, \\ x < -4. \end{cases}$</p>	教师展示问题，学生快速解答.	复习一元二次方程及一元一次不等式组的解法，为本节课的学习打基础.

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>问题情境</p> <p>如图 1 所示, 某职业学校的园艺社团计划用 30 m 的栅栏材料, 围一个面积不小于 50 m^2 的矩形区域种植花卉, 求满足条件的矩形区域的长的范围.</p> <div style="text-align: center;">  <p>图 1</p> </div> <p>我们设花坛的长为 $x \text{ m}$, 则宽是 $(15-x)\text{m}$, 根据题意, 得</p> $x(15-x) \geq 50, 0 < x < 15,$ <p>整理得</p> $x^2 - 15x + 50 \leq 0. \quad \textcircled{1}$ <p>像$\textcircled{1}$式, 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式不等式称为一元二次不等式, 它的一般形式是</p> $ax^2 + bx + c > 0 \text{ 或}$ $ax^2 + bx + c < 0 \quad (a \neq 0).$	<p>教师引导, 师生共同分析、解题, 教师强调规范的解题过程.</p> <p>教师提问: 不等式$\textcircled{1}$有什么特点?</p> <p>学生观察、回答.</p>	<p>本问题情境中的题目难度较大, 所以教师要适当引导.</p> <p>给出一元二次不等式的定义.</p>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>满足一元二次不等式的未知数的取值集合，通常称为这个不等式的解集。以上问题就是求一元二次不等式①的解集。如何求呢？</p> <p>一元二次方程 $x^2 - 15x + 50 = 0$ 的判别式</p> $\Delta = (-15)^2 - 4 \times 1 \times 50 = 25 > 0,$ <p>由求根公式，得</p> $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$ <p>故 $x_1 = 5, x_2 = 10$.</p> <p>因此，把不等式①左边的二次三项式 $x^2 - 15x + 50$ 因式分解，得</p> $x^2 - 15x + 50 = (x - 5)(x - 10),$ <p>不等式①转化为</p> $(x - 5)(x - 10) \leq 0. \quad \text{②}$ <p>因为两数乘积小于 0 时，相乘的两数异号，所以解不等式②相当于解下面两个不等式组：</p> $(I) \begin{cases} x - 5 \geq 0, \\ x - 10 \leq 0. \end{cases}$ $(II) \begin{cases} x - 5 \leq 0, \\ x - 10 \geq 0. \end{cases}$ <p>解不等式组 (I)，得</p> $5 \leq x \leq 10.$	<p>教师引导学生求解不等式，注意强调解题步骤。</p> <p>学生体会一元二次方程与一元二次不等式的关系。</p> <p>教师让学生独立求解不等式组 (I) 和 (II)。</p>	<p>借助一元二次方程与一元二次不等式，向学生强调转化与联系的观点。</p> <p>将一元二次不等式的求解转化为两个一元一次不等式组的求解，可借此培养学生转化的数学思想。</p>

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>解不等式组 (II), 可以看出满足不等式组 (II) 的未知数不存在.</p> <p>所以, 满足条件的矩形区域的长 (单位: m) 的范围是 $[5, 10]$.</p> <p>例 解下列不等式:</p> <p>(1) $x^2 - x - 12 > 0$;</p> <p>(2) $x^2 - x - 12 < 0$.</p> <p>解 (1) 因为</p> $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49 > 0,$ <p>方程 $x^2 - x - 12 = 0$ 的解是 $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, 则 $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4) > 0$.</p> <p>于是, 解不等式 (1) 等价于解一元一次不等式组:</p> $(I) \begin{cases} x + 3 > 0, \\ x - 4 > 0 \end{cases} \text{ 或 } (II) \begin{cases} x + 3 < 0, \\ x - 4 < 0. \end{cases}$ <p>不等式组 (I) 的解集是 $\{x x > 4\}$;</p> <p>不等式组 (II) 的解集是 $\{x x < -3\}$.</p> <p>故原不等式的解集为 $\{x x < -3 \text{ 或 } x > 4\}$, 即 $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.</p> <p>(2) 将所给不等式转化为下面两个不等式组:</p> $(III) \begin{cases} x + 3 > 0, \\ x - 4 < 0 \end{cases} \text{ 或 } (IV) \begin{cases} x + 3 < 0, \\ x - 4 > 0. \end{cases}$	<p>学生仿照例 (1), 独立完成例 (2).</p>	

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>(Ⅲ) 的解集是 $\{x \mid -3 < x < 4\}$, (Ⅳ) 的解集是 \emptyset. 所以原不等式的解集为 $\{x \mid -3 < x < 4\}$, 即 $(-3, 4)$.</p> <p>练习 解下列一元二次不等式:</p> <p>(1) $(x+1)(x-2) < 0$; (2) $(x+2)(x-3) > 0$; (3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; (4) $x^2 - 2x - 3 < 0$.</p>	<p>学生独立练习.</p>	<p>通过例题和练习让学生掌握一元二次不等式的解法.</p>
小结	<p>对于 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$), 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时:</p> <p>(1) 两边同除以 a, 得到二次项系数为 1 的不等式;</p> <p>(2) 分解因式, 使原不等式变为 $(x+x_1)(x+x_2) > 0$ 或 $(x+x_1) \times (x+x_2) < 0$ 的形式.</p> <p>(3) 求解一元一次不等式组的解集.</p>	<p>结合例题及练习, 师生共同总结一元二次不等式的解法.</p>	<p>明确本节的重点内容.</p>
作业	<p>本节练习 A 组第 1 题.</p>	<p>学生课后完成.</p>	<p>巩固本节内容.</p>