

3.2.2 二次函数模型

【教学目标】

1. 理解并掌握二次函数的图象和性质，了解二次函数与一元二次方程、一元二次不等式之间的关系.
2. 利用数形结合的方法研究二次函数，提升直观想象的核心素养.

【教学重点】

二次函数的图象和性质.

【教学难点】

分析函数的对称性，利用数形结合的方法研究二次函数.

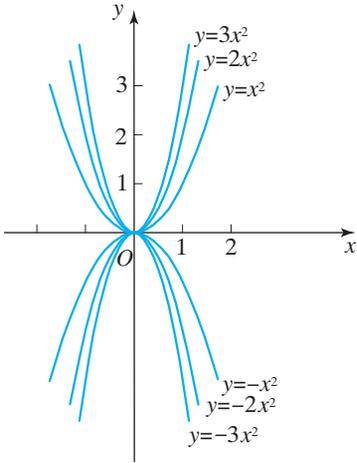
【教学方法】

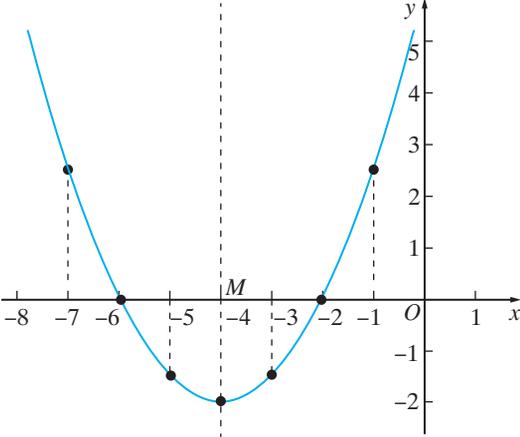
本节课主要采用启发式教学法和讲练结合法，在学生学习了函数的一般通性之后，以二次函数为载体较系统地利用数形结合的方法研究函数的性质，为后面研究其他函数的性质奠定基础.

【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	二次函数的一般形式： $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$ 定义域是 \mathbf{R} . 练习 1 下列函数中，哪些是二次函数？若是，分别指出二次项系数、一次项系数和常数项. (1) $y = 2x^2 + 3x - 1$; (2) $y = x + \frac{1}{x}$; (3) $y = 3(x-1)^2 + 1$; (4) $y = (x+3)^2 - x^2$; (5) $s = 3 - 2t^2$; (6) $v = 4\pi r^2$.	教师引导学生回忆二次函数的一般形式，并让学生举几个二次函数的例子. 学生口答.	复习旧知，引入新知. 回顾二次函数的定义.
新课	引例 在同一坐标系内作出下列函数的图象. $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$;	教师指出：如果 $b = c = 0$ ，则二次函数的一般形式变为	通过引例，使学生进一步掌握二次函数

续表

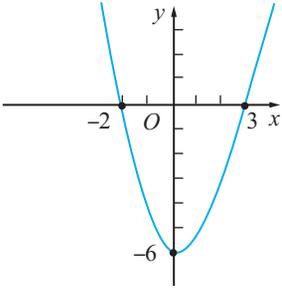
教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>$y = -x^2, y = -2x^2, y = -3x^2.$</p>  <p>图 1</p> <p>观察图 1 并完成填空： 函数 $y = ax^2$ 的图象，当 $a > 0$ 时开口____，当 $a < 0$ 时开口____，对称轴是____，顶点坐标是____. 函数是____函数. a 越大，开口越____.</p> <p>问题 1 研讨二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ 的性质与图象.</p> <p>解 (1) 因为</p> $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ $= \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 12)$ $= \frac{1}{2}(x + 4)^2 - 2.$ <p>由于对任意实数 x，都有 $\frac{1}{2}(x + 4)^2 \geq 0$,</p>	<p>$y = ax^2 (a \neq 0)$，下面我们先来研究这类函数的性质.</p> <p>教师出示引例.</p> <p>学生在初中已经重点学过二次函数的作图，所以教师只讲述 $y = x^2$ 的图象画法，其余 5 个函数的图象，学生分组合作完成，教师适当指导.</p> <p>学生观察图象，小组讨论，然后每组选一名代表汇报各组的讨论结果，最后师生一起总结出结论.</p> <p>师生共同解决问题 1，教师板书详细的解题过程，带领学生仔细分析各个性质的由来.</p>	<p>图象的描点作图法，并根据所作图象来分析函数 $y = ax^2$ 中系数 a 对图象的影响，提高学生的读图能力.</p> <p>通过对问题 1 中二次三项式的代数分析，使学生对二次函数的直观感知上升到理性认识的高度，更重要的是使学生掌握利用</p>

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>所以 $f(x) \geq -2$，并且，当 $x = -4$ 时取等号，即 $f(-4) = -2$。</p> <p>综上，可以得出性质： $x = -4$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 -2。 记为 $y_{\min} = -2$。</p> <p>点 $(-4, -2)$ 是这个图象的顶点。</p> <p>(2) 当 $y = 0$ 时，得</p> $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0,$ <p>即</p> $x^2 + 8x + 12 = 0,$ <p>解得 $x_1 = -6$, $x_2 = -2$。</p> <p>故该函数的图象与 x 轴交于两点 $(-6, 0)$, $(-2, 0)$。</p> <p>(3) 列表作图。</p> <p>以 $x = -4$ 为中间值，取 x 的一些值，列出这个函数的对应值表，然后画出该函数的图象，如图 2 所示。</p>  <p style="text-align: center;">图 2</p>	<p>教师引导学生观察图象可得出：该函数的对称轴是直线 $x = -4$。</p> <p>教师提问：这个结论是否正确呢？</p>	<p>数形结合研究函数的方法，初步培养学生的画图、识图能力。</p> <p>分析图象与 x 轴的交点，一方面为描点作图做准备，另一方面为下节研究函数与方程、不等式的关系做铺垫。</p>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>观察图 2 回答:</p> <p>问题 (1) 关于 $x = -4$ 对称的两个自变量的值对应的函数值有什么特点?</p> <p>答: 相同.</p> <p>问题 (2) $-4-h$ 与 $-4+h$ ($h > 0$) 关于直线 $x = -4$ 对称吗?</p> <p>分别计算 $-4-h$ 与 $-4+h$ 处的函数值, 你能发现什么?</p> <p>答: $f(-4-h) = f(-4+h)$.</p> <p>综上, 可以得出性质:</p> <p>直线 $x = -4$ 为该函数的对称轴.</p> <p>该函数在 $(-\infty, -4]$ 上是减函数, 在 $[-4, +\infty)$ 上是增函数.</p> <p>总结函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ 的性质:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 开口方向; 2. 最值; 3. 顶点; 4. 对称轴; 5. 单调性. <p>练习 2 用配方法求函数 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 的最小值和图象的对称轴, 并说出它在哪个区间上是增函数, 在哪个区间上是减函数.</p> <p>解 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$</p> $= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 1$	<p>教师通过问题 (1) 和问题 (2), 引导学生归纳二次函数的性质.</p> <p>学生练习. 教师解答学生的困惑.</p>	<p>关于二次函数对称性的教学设计是为了启发学生完成从直观到抽象、从感性思维到理性思维的升华, 感受数学的严密性、科学性.</p> <p>总结二次函数的性质, 将问题 1 的分析条理化.</p> <p>巩固配方法以及二次函数的性质.</p>

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$=3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 1$ $=3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3},$ <p>所以 $y_{\min} = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, 该函数图象的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{3}$, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{3}]$ 上是减函数, 在 $[-\frac{1}{3}, +\infty)$ 上是增函数.</p> <p>问题 2 研讨二次函数 $f(x) = -x^2 - 4x + 3$ 的性质与图象.</p> <p>问题 1 和问题 2 中的两个函数是两个具体实例, 对于一般的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的性质可从如下方面进行总结.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 顶点坐标. 2. 最值. 3. 对称轴. 4. 单调性. <p>探索研究 已知二次函数 $y = x^2 - x - 6$, 求:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) x 取哪些值时, $y = 0$; (2) x 取哪些值时, $y > 0$, x 取哪些值时, $y < 0$. <p>解 (1) 求使 $y = 0$ 的 x 的值, 即求一元二次方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 的所有根.</p> <p>方程的判别式</p>	<p>问题 2 是二次函数中 $a < 0$ 的类型, 学生可类比问题 1, 自己得出图象与性质, 并以表格的形式整理.</p> <p>教师引导学生分析二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 总结性质.</p>	<p>以表格的形式整理二次函数的性质, 清晰、直观.</p>

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$, 这说明该一元二次方程有两个解, 求解, 得 $x_1 = -2, x_2 = 3$.</p> <p>(2) 画出简图 (图 3), 该函数图象的开口向上. 从图象上可以看出, 它与 x 轴相交于两点 $(-2, 0), (3, 0)$, 这两点把 x 轴分成 3 段.</p> <p>当 $x \in (-2, 3)$ 时, $y < 0$.</p> <p>当 $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ 时, $y > 0$.</p>  <p style="text-align: center;">图 3</p> <p>练习 3 下列函数的自变量在什么范围内取值时, 函数值大于 0、小于 0 或等于 0.</p> <p>(1) $y = x^2 + 7x - 8$;</p> <p>(2) $y = -x^2 + 2x + 8$.</p> <p>总结二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间的关系.</p> <p>(1) 求满足 $y = 0$ 时 x 的值, 等价于求一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解;</p> <p>(2) 求满足 $y < 0$ 时 x 的取值范围, 等</p>	<p>教师指出: 求不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集, 就是求使二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函数值大于 0 的自变量的取值范围.</p> <p>学生练习, 教师巡回指导.</p> <p>师生共同总结.</p>	<p>巩固用图象法解一元二次不等式的步骤.</p> <p>巩固一元二次方程、一元二次不等式与二次函数三者之间的关系.</p> <p>加深学生的印象, 以便灵活应用三者之间的关系解决问题.</p>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	价于求一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集；求满足 $y > 0$ 时 x 的取值范围，等价于求一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集.		
小结	1. 二次函数的性质. 2. 一元二次方程、一元二次不等式与二次函数的关系. 3. 利用数形结合研究二次函数.	学生阅读教材，畅谈本节课的收获，教师引导学生总结本节课的知识点.	便于学生厘清思路，把握重点内容.
作业	必做题：本节练习 A 组题目. 选做题：本节练习 B 组题目.	学生课后完成.	巩固相关知识.