

4.1.2 指数函数

【教学目标】

1. 了解指数函数的定义，理解指数函数的图象和性质.
2. 能利用数形结合的方法解决相关问题.
3. 通过分析图象，归纳指数函数的性质，提升逻辑推理的核心素养.

【教学重点】

指数函数的图象与性质.

【教学难点】

指数函数的图象、性质与底数 a 的关系.

【教学方法】

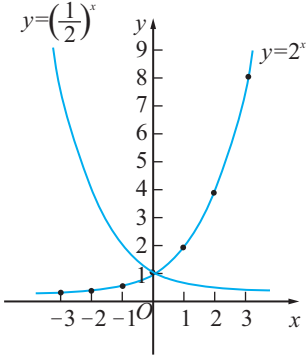
本节课主要采用讲练结合和小组合作的教学方法. 本节课由生活中的真实例子导入新课，引入指数函数的定义，并通过一组练习帮助学生理解指数函数的定义. 通过列表、描点、连线得到指数函数的图象后，启发学生充分利用函数的图象来研究函数的性质. 在得到一些具体的函数图象后，利用 GeoGebra 软件作图，探索一般指数函数的性质.

【教学过程】

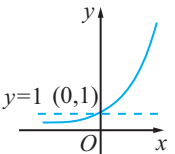
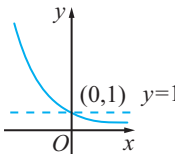
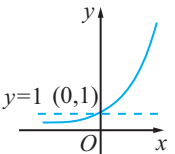
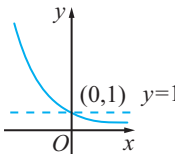
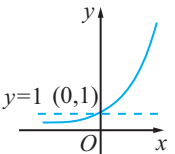
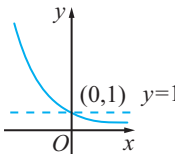
教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	一种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年剩留的质量约是原来的 84%. 试写出这种物质的剩留量随时间变化的函数解析式.	教师分析解题的过程，得到 $y=0.84^x$.	通过实例引入，让学生得到指数函数的一些特征，从而有了感性认识.
新课	<p>一、指数函数的定义</p> <p>一般地，函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$, $x\in\mathbf{R}$) 称为指数函数. 其中 x 是自变量，定义域为 \mathbf{R}.</p> <p>探究 1 $y=2\times 3^x$ 是指数函数吗?</p>	<p>教师板书课题，在“导入”中问题的基础上，引导学生归纳出指数函数的定义.</p> <p>教师强调指数函数的解析式 $y=a^x$ 中，a^x 的系数是 1.</p>	借助实例，归纳出这种自变量在指数位置上的函数.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	<p>探究 2 为什么要规定 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 呢?</p> <p>(1) 若 $a = 0$, 则当 $x > 0$ 时, $a^x = 0$; 当 $x \leq 0$ 时, a^x 无意义.</p> <p>(2) 若 $a < 0$, 则对于 x 的某些数值, 可使 a^x 无意义.</p> <p>如 $(-2)^x$, 这时对于 $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}, \dots$, 等等, 在实数范围内函数值不存在.</p> <p>(3) 若 $a = 1$, 则对于任何 $x \in \mathbf{R}$, $a^x = 1$, 是一个常量, 没有研究的必要性.</p> <p>为了避免上述各种情况, 所以规定 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.</p> <p>在规定的以后, 对于任何 $x \in \mathbf{R}$, a^x 都有意义, 且 $a^x > 0$. 因此指数函数的定义域是 \mathbf{R}, 值域是 $(0, +\infty)$.</p> <p>练习 1 指出下列函数哪些是指数函数:</p> <p>(1) $y = 4 \cdot 3^x$; (2) $y = \pi^x$; (3) $y = 0.3^x$; (4) $y = x^3$.</p> <p>二、指数函数的图象和性质</p> <p>在同一平面直角坐标系中分别作出函数 $y = 2^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象.</p> <p>(1) 列表: 略.</p>	<p>学生分组合作探究教师提出的问题. 教师在学生分组探究的过程中要适当指导.</p> <p>教师指出: 学习指数函数是为了更好地利用函数的性质, 而研究函数性质的一个直观办法是通过函数</p>	<p>对 a 的规定, 学生容易忽略, 问题的提出让学生学会思考, 理解为什么这样规定, 以加深学生的印象, 从而把新旧知识衔接得更好.</p> <p>强化学生对指数函数定义的理解.</p>

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>(2) 描点：略.</p> <p>(3) 连线：略.</p>  <p>练习 2 作函数 $y = 3^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象.</p> <p>探究 3 观察 $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象, 找出图象特征.</p> <p>(1) 图象向左、右方向无限延伸;</p> <p>(2) 图象在 x 轴上方, 向上无限延伸, 向下无限接近于 x 轴;</p> <p>(3) 图象都经过点 $(0, 1)$;</p> <p>(4) $a = 2$ 或 $a = 3$ 时, 从左向右看图象逐渐上升;</p> <p>$a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{1}{3}$ 时, 从左向右看图象逐渐下降.</p>	<p>的图象来研究, 那么指数函数的图象是怎样的? 如何作指数函数的图象呢?</p> <p>教师引导学生通过列表、描点、连线得到指数函数 $y = 2^x$ 的图象. 重复列表、描点、连线的步骤, 在同一坐标系中完成指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象.</p> <p>请学生分组完成练习 2, 教师适当指导.</p> <p>教师提问: 指数函数 $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象有什么共同的特征? 又有哪此不同?</p>	<p>让学生完成作图过程, 从作图过程中加深对指数函数的感性认识.</p> <p>为了得到指数函数的性质, 引导学生观察四个函数的图象特征, 从而容易归纳得出指数函数的性质, 这遵循了认识的一般规律, 学生很容易接受.</p>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图																			
新课	<p>事实上，(1) “图象向左、向右方向无限延伸” 揭示了 “函数的定义域为 \mathbf{R}”；</p> <p>(2) “图象在 x 轴上方，向上无限延伸，向下无限接近于 x 轴” 揭示了 “函数的值域为 $(0, +\infty)$”；</p> <p>(3) “图象都经过点 $(0, 1)$” 揭示了 “当 $x=0$ 时，$a^x=1$”；</p> <p>(4) “$a=2$ 或 $a=3$ 时，从左向右看图象逐渐上升；$a=\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{1}{3}$ 时，从左向右看图象逐渐下降” 揭示了 “当 $a>1$ 时，指数函数是增函数；当 $0<a<1$ 时，指数函数是减函数”。</p> <p>下表总结了指数函数的图象与性质。</p>	<p>教师提问：你能用学过的数学语言来表示这些函数的性质吗？</p> <p>教师引导学生用数学语言来表示这些函数的性质。</p>	<p>锻炼学生的口头表达能力以及自然语言与数学语言的转化能力。</p>																			
	<table border="1" data-bbox="239 1104 682 1669"> <thead> <tr> <th data-bbox="239 1104 297 1191">a 的范围</th> <th data-bbox="297 1104 489 1191">$a>1$</th> <th data-bbox="489 1104 682 1191">$0<a<1$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="239 1191 297 1372">图象</td> <td data-bbox="297 1191 489 1372">  </td> <td data-bbox="489 1191 682 1372">  </td> </tr> <tr> <td data-bbox="239 1372 297 1459">定义域</td> <td colspan="2" data-bbox="297 1372 682 1459" style="text-align: center;">\mathbf{R}</td> </tr> <tr> <td data-bbox="239 1459 297 1497">值域</td> <td colspan="2" data-bbox="297 1459 682 1497" style="text-align: center;">$(0, +\infty)$</td> </tr> <tr> <td data-bbox="239 1497 297 1536">定点</td> <td colspan="2" data-bbox="297 1497 682 1536" style="text-align: center;">$(0, 1)$</td> </tr> <tr> <td data-bbox="239 1536 297 1669" rowspan="2">单调性</td> <td data-bbox="297 1536 489 1574" style="text-align: center;">增函数</td> <td data-bbox="489 1536 682 1574" style="text-align: center;">减函数</td> </tr> <tr> <td data-bbox="297 1574 489 1669"> $x \geq 0$ 时, $y \geq 1$; $x < 0$ 时, $0 < y < 1$ </td> <td data-bbox="489 1574 682 1669"> $x \geq 0$ 时, $0 < y \leq 1$; $x < 0$ 时, $y > 1$ </td> </tr> </tbody> </table> <p data-bbox="239 1689 682 1776">练习 3 (1) 对于指数函数 $y=a^x$, 当 _____ 时, 函数是增函数; 当 _____ 时, 函数是减函数;</p>	a 的范围	$a>1$	$0<a<1$	图象			定义域	\mathbf{R}		值域	$(0, +\infty)$		定点	$(0, 1)$		单调性	增函数	减函数	$x \geq 0$ 时, $y \geq 1$; $x < 0$ 时, $0 < y < 1$	$x \geq 0$ 时, $0 < y \leq 1$; $x < 0$ 时, $y > 1$	<p>师生共同完成该表的填写。</p> <p>学生独立作答。</p>
a 的范围	$a>1$	$0<a<1$																				
图象																						
定义域	\mathbf{R}																					
值域	$(0, +\infty)$																					
定点	$(0, 1)$																					
单调性	增函数	减函数																				
	$x \geq 0$ 时, $y \geq 1$; $x < 0$ 时, $0 < y < 1$	$x \geq 0$ 时, $0 < y \leq 1$; $x < 0$ 时, $y > 1$																				

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	<p>_____ 时, 函数是减函数.</p> <p>(2) 若函数 $f(x) = (a + 1)^x$ 是减函数, 则 a 的取值范围是_____.</p> <p>例 1 用指数函数的性质, 比较下列各题中两个值的大小:</p> <p>(1) $1.7^{2.5}$ 和 1.7^3;</p> <p>(2) $0.8^{-0.1}$ 和 $0.8^{-0.2}$.</p> <p>解 (1) 考察函数 $y = 1.7^x$, 它在实数集上是增函数.</p> <p>因为 $2.5 < 3$, 所以 $1.7^{2.5} < 1.7^3$.</p> <p>(2) 考察函数 $y = 0.8^x$, 它在实数集上是减函数.</p> <p>因为 $-0.1 > -0.2$, 所以 $0.8^{-0.1} < 0.8^{-0.2}$.</p> <p>练习 4 比较下列各题中两个值的大小:</p> <p>(1) $0.7^{0.8}$ _____ $0.7^{0.7}$;</p> <p>(2) $1.1^{-2.1}$ _____ 1.1^{-2};</p> <p>(3) 如果 $2^n < 2^m$, 则 n _____ m.</p> <p>例 2 已知实数 a, b 满足 $\left(\frac{3}{7}\right)^a > \left(\frac{3}{7}\right)^b$, 试判断 6^a 与 6^b 的大小.</p>	<p>教师强调: 对于比较幂值大小的问题, 若是底数相同, 则可以构造一个指数函数, 用指数函数的单调性来解决.</p> <p>学生画图验证.</p> <p>用指数函数的单调性比较完大小之后, 教师引导学生用函数的图象或计算器检验.</p> <p>学生解答.</p> <p>教师适当指导.</p> <p>教师引导学生利用指数函数的性质解决问题.</p>	<p>生对指数函数性质的掌握.</p> <p>构造指数函数来比较两值的大小, 并让学生采用不同的途径来进行检验, 这样既巩固了指数函数的单调性, 又锻炼了学生数学思维的灵活性.</p> <p>本题比例 1 的难度稍大, 进一步帮助学生巩固指数函数的单调性.</p>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>解 因为函数 $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ 在实数集上是减函数, 所以由 $\left(\frac{3}{7}\right)^a > \left(\frac{3}{7}\right)^b$ 可知 $a < b$.</p> <p>又因为 $y = 6^x$ 在实数集上是增函数, 所以</p> $6^a < 6^b.$		
小结	<ol style="list-style-type: none"> 1. 指数函数的定义. 2. 指数函数的图象与性质. 3. 指数函数的应用: 比较大小. 	<p>教师引导学生回顾本节主要内容, 深入理解指数函数的概念、图象与性质.</p>	<p>简洁明了地概括本节的重要知识, 学生易于理解、记忆.</p>
作业	<ol style="list-style-type: none"> 1. 书面作业 必做题: 本节练习 A 组第 2 题. 选做题: 本节练习 B 组第 2 题. 2. 计算机上的练习 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = 10^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的图象, 并指出这两个函数各有什么性质以及它们的图象关系. 	<p>教师布置作业, 学生课后完成.</p>	<p>针对学生实际, 对课后书面作业实施分层设置.</p> <p>进一步引导学生熟练利用数学软件加深对相关知识的理解.</p>